

§ 1. Булевы функции или функции алгебры логики.

Пусть $E = \{0, 1\}$, E^n — множество двоичных наборов длины n . Набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E^n$ будем называть булевым набором и обозначать через $\tilde{\alpha}^n$. Число единиц в наборе $\tilde{\alpha}^n$ назовем весом набора (обозначение $\|\tilde{\alpha}^n\|$).

Два набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$, отличающиеся только в k -ой компоненте, называются соседними по k -ой компоненте.

Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных $f: E^n \rightarrow E$. Набор символов переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) будем обозначать также через \tilde{x}^n . Через $P_2(n)$ обозначим множество всех булевых функций от n переменных, т.е. $P_2(n) = \left\{ f(\tilde{x}^n) \mid f: E^n \rightarrow E \right\}$.

Переменная x_k для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется существенной, если найдется пара наборов, соседних по k -ой компоненте $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что значения функции на них различны, т.е. $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. В противном случае переменная x_k называется несущественной или фиктивной.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна функции $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$, если одна из них получается из другой с помощью введения или вычеркивания некоторых фиктивных переменных. Заметим, что для любой функции, отличной от константы 0 или 1, существует равная ей, у которой все переменные существенные.

Через B^n обозначим n -мерный булев (или двоичный) куб, который часто называют также единичным n -мерным кубом. Заметим, что B^n — это граф, вершины которого совпадают с E^n , а ребра соединяют соседние вершины.

Через \bar{x} обозначим отрицание от переменной x .

В таблице 1 приведены основные элементарные функции алгебры логики.

x	y	$x \& y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Таблица 1

Эти функции носят соответственно названия:

$x \& y$ — конъюнкция x и y , часто обозначают через точку или вообще опускают, читается как « x и y ».

$x \vee y$ — дизъюнкция x и y , читается как « x или y ».

$x \oplus y$ — сложение по модулю 2 x и y .

$x \rightarrow y$ — импликация x и y , читается как «из x следует y ».

$x \leftrightarrow y$ — эквивалентность x и y .

$x | y$ — штрих Шеффера x и y , часто эту функцию называют антиконъюнкцией, читается как «не x или не y ».

$x \downarrow y$ — стрелка Пирса x и y , часто эту функцию называют антидизъюнкцией, читается как «не x и не y ».

Символы \neg , $\&$, \vee , \oplus , \rightarrow , \leftrightarrow , $|$, \downarrow , участвующие в обозначениях элементарных функций, называются логическими связками.

Основные тождества алгебры логики.

1. Функция $x \circ y$, где $\circ \in \{ \&, \vee, \oplus, \leftrightarrow, |, \downarrow \}$, обладает свойством коммутативности:

$$x \circ y = y \circ x.$$

2. Функция $x * y$, где $* \in \{ \&, \vee, \oplus, \leftrightarrow \}$, обладает свойством ассоциативности:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

3. Дистрибутивные законы:

$$(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z);$$

$$(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z);$$

$$(x \oplus y) \& z = (x \& z) \oplus (y \& z).$$

4. Законы де Моргана:

$$a) \overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$б) \overline{x \vee y} = \bar{x} \& \bar{y}.$$

5. Законы поглощения:

$$a) x \vee (x \& y) = x;$$

$$б) x \& (x \vee y) = x.$$

$$6. \quad a) x \vee (\bar{x} \& y) = x \vee y;$$

$$б) x \& (\bar{x} \vee y) = x \& y.$$

$$7. \quad a) x \& \bar{x} = x \& 0 = x \oplus x = 0; \quad б) x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = 1.$$

8. Тождества, выражающие одни логические операции через другие:

$$a) x \oplus y = (x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y) = (x \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y});$$

$$б) x \rightarrow y = \bar{x} \vee y;$$

$$в) x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y} = (x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \& (\bar{x} \vee y);$$

$$г) x \mid y = \overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$д) x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \& \bar{y}.$$

Будем считать, что операция отрицания — сильнее, чем любая двухместная связка. Конъюнкция $\&$ — самая сильная из связок $\vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, \mid, \downarrow$. В дальнейшем, знак $\&$ будем записывать в виде точки или вообще опускать. Это соглашение позволяет упрощать запись формул, не писать внешние и ряд других скобок.

Например, тождество $(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z)$ можно записать в виде $(x \vee y)z = xz \vee yz$.

В справедливости приведенных тождеств проще всего убедиться, строя таблицы соответствующих им функций.

Пример 1. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$, заданным векторно: $\tilde{\alpha}_f = (1001)$, $\tilde{\alpha}_g = (1110)$, построить векторное задание функции $h(\tilde{x}^4) = f(x_1, g(x_4, x_3)) \rightarrow g(x_2, f(x_1, x_3))$. Для этой функции h построить таблицу $\Pi_{2,2}(h)$.

Решение. Для каждой из функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ перейдём от векторного задания к табличному (см. табл.2).

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$g(x_1, x_2)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Таблица 2

Принимая во внимание тот факт, что функция $x \rightarrow y$ обращается в 0 только на наборе (1,0), а функция $g(x_1, x_2)$ равна 0 лишь на наборе (1,1), можно упростить процедуру построения таблицы функции $h(\tilde{x}^4)$. В самом деле, функция $h(\tilde{x}^4) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x_1, g(x_4, x_3)) = 1$ и $g(x_2, f(x_1, x_3)) = 0$. В свою очередь, $g(x_2, f(x_1, x_3)) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_2 = f(x_1, x_3) = 1$, тогда в силу того, что $f(x_1, x_3) = 1$ при $x_1 = x_3$, заключаем, что

$g(x_2, f(x_1, x_3)) = 0$ либо при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, либо при $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$. Теперь $f(x_1, g(x_4, x_3)) = 1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = g(x_4, x_3)$. Замечаем, что если $x_1 = 0$, то $g(x_4, 0) = 1$ при любом значении переменной x_4 . Если $x_1 = 1$, тогда $g(x_4, 1) = 1$ при единственном значении переменной $x_4 = 0$. Таким образом, получаем $\tilde{\alpha}_h = (1111111111111101)$.

x_1	x_2	x_3	x_4	g_1	f_1	f_2	g_2	$h(\tilde{x}^4)$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Таблица 3

В таблице 3 функция $h(\tilde{x}^4)$, реализуемая заданной формулой, построена «постепенно». Здесь используются следующие обозначения: $g_1 = g(x_4, x_3)$, $f_1 = f(x_1, g(x_4, x_3))$,

$f_2 = f(x_1, x_3)$, $g_2 = g(x_2, f(x_1, x_3))$. Построим теперь для булевой функции h прямоугольную таблицу $\Pi_{2,2}(h)$ (см. табл.4).

x_1	x_2					x_3
		0	0	1	1	x_4
		0	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	
1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	1	

Таблица 4

Пример 2. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у функции $f(\tilde{x}^3) = (11110011)$.

Решение. От векторного задания функции $f(\tilde{x}^3)$ перейдем к ее табличному заданию (см. табл. 5).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 5

Сравнивая значения функции на всех парах наборов, соседних по переменной x_3 , отметим, что $f(0,0,0) = f(0,0,1) = 1$,

$f(0,1,0)=f(0,1,1)=1$, $f(1,0,0)=f(1,0,1)=0$ и $f(1,1,0)=f(1,1,1)=1$, т. е. $f(x_1, x_2, 0) \equiv f(x_1, x_2, 1)$. Следовательно, переменная x_3 фиктивная. Построим теперь функцию $g(\tilde{x}^2)$ посредством операции удаления из функции $f(\tilde{x}^3)$ фиктивной переменной x_3 : вычеркнем из таблицы 5 все строки, соответствующие наборам вида $(\alpha_1, \alpha_2, 1)$ и столбец, соответствующий переменной x_3 . Полученная функция $g(\tilde{x}^2)$ изображена в таблице 6. Функции $g(\tilde{x}^2)$ и $f(\tilde{x}^3)$ равны.

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица 6

Далее, так как $g(1,0)=0$, а $g(1,1)=1$, заключаем, что переменная x_2 существенная. Аналогично, так как $g(0,0)=1$, а $g(1,0)=0$, то переменная x_1 существенная. Итак, у функции $f(\tilde{x}^3)$ переменные x_1, x_2 существенные, а переменная x_3 фиктивная. (Нетрудно убедиться в том, что $f(\tilde{x}^3) = x_1 \rightarrow x_2$.)

ЗАДАЧИ

1.1. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$, заданным векторно, построить функцию h :

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (0111)$,

a) $h(\tilde{x}^2) = f(x_1, g(x_1, x_2))$;

b) $h(\tilde{x}^2) = g(x_2, f(x_2, x_1))$;

c) $h(\tilde{x}^2) = f(f(x_1, g(x_1, x_2)), g(x_1, x_2))$;

d) $h(\tilde{x}^3) = g(x_1, x_2) \oplus f(x_3, g(x_1, x_2))$;

e) $h(\tilde{x}^3) = f(x_2, g(x_3, x_1)) \leftrightarrow g(x_1, g(x_2, x_3))$.

2) $\tilde{\alpha}_f = (1010)$, $\tilde{\alpha}_g = (0110)$,

a) $h(\tilde{x}^3) = f(x_3, g(x_1, x_2))$;

b) $h(\tilde{x}^3) = g(g(x_3, x_2), f(x_1, x_3))$;

c) $h(\tilde{x}^3) = f(f(x_3, g(x_1, x_2)), g(x_1, x_2))$;

d) $h(\tilde{x}^3) = f(f(x_1, x_2), g(x_3, x_1)) \rightarrow g(x_1, g(x_1, x_2))$.

1.2. Найти число всех функций от n переменных, которые на противоположных наборах принимают одинаковые значения. При $n = 2, 3$ найти все функции существенно зависящие от всех переменных.

1.3. Найти число всех функций от n переменных, которые на противоположных наборах принимают противоположные значения. При $n = 2, 3$ найти все функции существенно зависящие от всех переменных.

1.4. Найти число всех функций от n переменных, которые на любой паре соседних наборов принимают противоположные значения. Найти вид этих функций.

1.5. Построив таблицы для соответствующих функций, убедиться в справедливости следующих эквивалентностей:

a) $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$;

b) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$;

c) $x \downarrow y = ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))$;

d) $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$;

e) $x \& (y \leftrightarrow z) = ((x \& y) \leftrightarrow (x \& z)) \leftrightarrow x$;

f) $x \rightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$;

g) $x \vee (y \rightarrow z) = (x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$;

h) $x \& (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \& z)$;

i) $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$;

j) $x \rightarrow (y \& z) = (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow z)$;

k) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$.

1.6. Используя основные тождества алгебры логики, докажете справедливость соотношений из задачи 1.5.

1.7. Показать, что x_1 — фиктивная переменная у функции f , реализовав для этой цели функцию f формулой, не содержащей явно переменную x_1 :

$$a) f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_1);$$

$$b) f(\tilde{x}^2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \mid x_2);$$

$$c) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3) \cdot (\overline{x_3 \rightarrow x_2});$$

$$d) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \leftrightarrow (\overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2} \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3);$$

$$e) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \rightarrow (x_1 x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \rightarrow x_1) \cdot x_3.$$

1.8. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у следующих функций:

$$a) f(\tilde{x}^2) = ((x_1 \vee x_2) \rightarrow x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_1);$$

$$b) f(\tilde{x}^2) = (x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \leftrightarrow x_1 \cdot x_2);$$

$$c) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \rightarrow \overline{x_2}) \oplus (x_2 \rightarrow \overline{x_3})) \oplus (x_2 \rightarrow x_3);$$

$$d) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \oplus (\overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2} \cdot x_3)) \vee (x_2 \leftrightarrow x_3);$$

$$e) f(\tilde{x}^3) = (10101010);$$

$$f) f(\tilde{x}^3) = (10011001);$$

$$g) f(\tilde{x}^3) = (00111100).$$

§ 2. Специальные представления булевых функций.

Разложение по переменным.

Пусть $\sigma \in E$. Введём обозначение $x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$

Нетрудно проверить, что $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$. Тогда

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_k^{\sigma_k} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2, \dots, x_k = \sigma_k.$$

Теорема 1 (о разложении функции). Всякую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ при любом $k (1 \leq k \leq n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \dots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ из E^k .

Следствие 1 (разложение по i -ой переменной).

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (1)$$

Следствие 2 (разложение по всем n переменным).

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad (2)$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из E^n .

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ не равна тождественно нулю, то выражение (2) можно записать в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}, \quad (3)$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из E^n , на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в 1.

Представление функции в виде (3) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращённо *совершенной д.н.ф.* или *СДНФ*) функции $f(\tilde{x}^n)$.

Непосредственно к понятию совершенной д.н.ф. примыкает следующая теорема.

Теорема 2. Всякую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Кроме приведённых выше разложений булевых функций, широко используются также следующие разложения.

Теорема 3. Всякую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ при любом k ($1 \leq k \leq n$) можно представить в виде:

$$f(\tilde{x}^n) = \big\&_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee x_k^{\overline{\sigma_k}} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \right),$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ из E^k .

Следствие 1 (разложение по i -ой переменной).

$$f(\tilde{x}^n) = (\overline{x_i} \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)) \& \\ \& (x_i \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)). \quad (4)$$

Следствие 2 (разложение по всем n переменным).

$$f(\tilde{x}^n) = \&_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \right), \quad (5)$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из E^n .

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ не равна тождественно 1, тогда выражение (5) можно записать в виде:

$$f(\tilde{x}^n) = \&_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} \right), \quad (6)$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из E^n , на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в 0.

Представление функции в виде (6) называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (сокращённо **совершенной к.н.ф.** или **СКНФ**) функции $f(\tilde{x}^n)$.

Пример 1. Разложить по переменной x_1 , применяя формулы (1) и (4), и представить в совершенных д.н.ф. и к.н.ф. функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$.

Решение. $f(0, x_2) = 0 \rightarrow x_2 = 1$, $f(1, x_2) = 1 \rightarrow x_2 = x_2$.

Поэтому согласно (1) имеем $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2$, а ис-

пользуя формулу (4), получаем $f(x_1, x_2) = (\overline{x_1} \vee x_2) \& (x_1 \vee 1)$.

Так как $f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 1$ и $f(1, 0) = 0$, совершен-

ная д.н.ф. функции f имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee$

$\vee x_1^1 x_2^1 = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_1 x_2$, а совершенная к.н.ф. такова:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 = \overline{x_1} \vee x_2.$$

Пример 2. Представить в совершенной д.н.ф. и совершенной к.н.ф. функцию $f(\tilde{x}^3) = (01101011)$.

Решение. Функция принимает значение 1 на наборах $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$. Элементарные конъюнкции,

соответствующие этим наборам, таковы: $x_1^0 x_2^0 x_3^1 = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3$,

$x_1^0 x_2^1 x_3^0 = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$, $x_1^1 x_2^0 x_3^0 = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}$, $x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2 \overline{x_3}$ и

$x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1 x_2 x_3$. Значит, совершенная д.н.ф. функции $f(\tilde{x}^3)$

имеет вид: $\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$. Для

построения совершенной к.н.ф. рассматриваем все те наборы, на

которых функция f обращается в нуль. Это наборы $(0, 0, 0)$,

$(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1)$. Элементарные дизъюнкции, соответствующие

этим наборам, таковы:

$$x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$

$$x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^0 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3},$$

$$x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}.$$

Перемножая эти дизъюнкции, получаем совершенную к.н.ф. функции $f: (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$.

Полином Жегалкина.

Теорема 4. Всякую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}, \quad (7)$$

где сумма по mod 2 берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из E^n , на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в 1.

Нетрудно видеть, что $x^0 = \overline{x} = x \oplus 1$, $x^1 = x = x \oplus 0$, тогда $x^\sigma = x \oplus \overline{\sigma}$. Подставив в (7) вместо $x_i^{\sigma_i}$ выражение $x_i \oplus \overline{\sigma_i}$, получим

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} (x_1 \oplus \overline{\sigma_1}) \dots (x_n \oplus \overline{\sigma_n}).$$

Обычным образом раскрыв скобки и приведя подобные члены по правилу $A \oplus A = 0$, придем к представлению функции в виде полинома по mod 2:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}} \alpha_{i_1 \dots i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s}, \quad (8)$$

где коэффициенты $\alpha_{i_1 \dots i_s}$ равны 0 или 1. Пустая конъюнкция считается равной 1, так что коэффициент, соответствующий пустому множеству индексов, представляет собой свободный член полинома. Представление функции $f(\tilde{x}^n)$ в виде (8) носит название **полинома Жегалкина**. Для функции, тождественно равной нулю, в качестве полинома берется 0.

Теорема 5. Всякая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Пример 3. Построить полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}^3) = (01101011)$.

Решение. В примере 2 для этой функции была построена СДНФ: $\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$, поэтому

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^3) = & (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus (x_1 \oplus 1)x_2(x_3 \oplus 1) \oplus \\ & \oplus x_1(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus x_1 x_2(x_3 \oplus 1) \oplus x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Для преобразования этого выражения могут быть

использованы обычные приемы элементарной алгебры, за исключением правила $A \oplus A = 0$. В частности, применяя группировку членов и вынесение за скобки, получаем

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^3) &= (x_1 \oplus 1)(x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2) \oplus \\ &\quad \oplus (x_3 \oplus 1)(x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2) \oplus x_1 x_2 x_3 = \\ &= (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus 1)x_1 \oplus x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Наконец, раскрывая скобки, получаем полином Жегалкина:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^3) &= x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 x_3 = \\ &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Кроме рассмотренного способа построения полинома Жегалкина, существуют и другие методы построения. Рассмотрим некоторые из них.

Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть $P(\tilde{x}^n)$ — искомый полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f(\tilde{x}^n)$. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} P(\tilde{x}^n) &= \alpha_0 \cdot 1 \oplus \alpha_1 \cdot x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \cdot x_n \oplus \alpha_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus \alpha_{n-1,n} x_{n-1} \cdot x_n \oplus \dots \oplus \alpha_{1\dots n} x_1 \cdot \dots \cdot x_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Требуется найти неизвестные коэффициенты в этом разложении. Поступаем так. Для каждого $\tilde{\alpha} \in E^n$ составляем уравнение $P(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$, где $P(\tilde{\alpha})$ — выражение, получающееся из формулы (9) при $\tilde{x} = \tilde{\alpha}$. Это дает систему из

2^n уравнений с 2^n неизвестными, которая имеет единственное решение. Решив систему, находим коэффициенты полинома $P(\tilde{x}^n)$.

Пример 4. Методом неопределенных коэффициентов найти полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}^3) = (01101011)$.

Решение. $P(\tilde{x}^3) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot x_1 \oplus \alpha_2 \cdot x_2 \oplus \alpha_3 \cdot x_3 \oplus$
 $\oplus \alpha_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus \alpha_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 \oplus \alpha_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus \alpha_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$

Выпишем систему уравнений для неизвестных коэффициентов:

$$f(0,0,0) = 0 = \alpha_0,$$

$$f(0,0,1) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_3,$$

$$f(0,1,0) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_2,$$

$$f(0,1,1) = 0 = \alpha_0 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{23},$$

$$f(1,0,0) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_1,$$

$$f(1,0,1) = 0 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{13},$$

$$f(1,1,0) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_{12},$$

$$f(1,1,1) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{12} \oplus \alpha_{13} \oplus \alpha_{23} \oplus \alpha_{123}.$$

Решая эту систему, находим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{12} = \alpha_{123} = 1$,

$\alpha_0 = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$. Следовательно, $f(\tilde{x}^3) = (01101011) =$
 $= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3.$

Алгебраический метод построения полинома.

Сначала формулу, реализующую функцию f , преобразуем в формулу над множеством связок $\{\bar{}, \&\}$. Затем заменяем всюду подформулы вида \bar{A} на $A \oplus 1$, раскрываем скобки, пользуясь дистрибутивным законом $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$, и применяя тождества $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$ и $A \oplus 0 = A$.

Пример 5. Построить полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$.

Решение. Выразим f в виде формулы через отрицание и конъюнкцию: $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3}} = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3}$.

Заменяем теперь все подформулы вида \bar{A} на $A \oplus 1$:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^3) &= (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot x_3 \oplus 1 = \\ &= (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1) x_3 \oplus 1 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

2.1. Для следующих функций построить СДНФ и СКНФ:

a) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3$;

b) ; $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot x_3$;

c) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$;

$$d) f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (x_1 \cdot x_2 \vee x_3);$$

$$e) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 \cdot x_3);$$

$$f) f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \cdot x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 \cdot x_3 \rightarrow x_2).$$

2.2. Построить из заданной д.н.ф. функции ее СДНФ:

$$a) f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_3};$$

$$b) f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_3};$$

$$c) f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}.$$

2.3. Построить из заданной к.н.ф. функции ее СКНФ:

$$a) f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \vee x_3);$$

$$b) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3) \cdot \overline{x_3};$$

$$c) f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_3}) \cdot (x_2 \vee x_3).$$

2.4. Выразить через полином Жегалкина все элементарные функции алгебры логики от двух переменных.

2.5. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций:

$$a) f(\tilde{x}^3) = (01101001); \quad b) f(\tilde{x}^3) = (10001110);$$

$$c) f(\tilde{x}^3) = (00000111); \quad d) f(\tilde{x}^3) = (01100110).$$

2.6. Построить полиномы Жегалкина для всех функций из задачи 2.1.

§ 3. Двойственность и класс самодвойственных функций.

Функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если $g(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, эту функцию будем обозначать через $f^*(x_1, \dots, x_n)$ т.е. $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Легко видеть, что функция 0 двойственна функции 1,

функция 1 двойственна функции 0,

функция x двойственна функции \bar{x} ,

функция \bar{x} двойственна функции x ,

функция $x_1 \& x_2$ двойственна функции $x_1 \vee x_2$,

функция $x_1 \vee x_2$ двойственна функции $x_1 \& x_2$.

Если функция f задана формулой через отрицание, $\&$ и \vee , то справедлив следующий *принцип двойственности*. Для того, чтобы получить формулу, реализующую функцию f^* , достаточно заменить все операции $\&$ на \vee , все операции \vee на $\&$, а все константы — противоположными константами.

Из принципа двойственности вытекает, что если имеет место некоторое тождество, то справедливо и двойственное к нему. Нетрудно понять, что пары а) и б) основных тождеств алгебры логики 4 – 7, приведенные в § 1, являются двойственными.

Пример1. Используя принцип двойственности, построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции $f = x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$, и убедиться в том, что полученная формула эквивалентна формуле $A = x \cdot (y \oplus z)$.

Решение. Согласно принципу двойственности имеем:
$$f^* = (x \vee 0) \cdot (y \vee (z \cdot 1)) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = x \cdot (y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) =$$
$$= x \cdot (y \vee z) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z}) = x \cdot (y \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}) = x \cdot (y \oplus z).$$
 Получаем, что функция, двойственная к функции f , может быть реализована формулой A .

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если она совпадает со своей двойственной, т.е.
$$f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n).$$

Множество всех самодвойственных функций от n переменных будем обозначать через $S(n)$.

Класс всех самодвойственных функций (от любого числа переменных) замкнут относительно операции суперпозиции, обозначим его через S , т. е. $[S] = S$.

Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда она на любых двух противоположных наборах принимает противоположные значения. Отсюда следует, что самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на первой половине строк, поэтому $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$.

Лемма 1 (о несамодвойственной функции). Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не является самодвойственной, то из нее с помощью подстановки x и \bar{x} вместо переменных можно получить константу.

Доказательство: Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не самодвойственна, тогда найдется пара противоположных наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ таких, что значения функции на них совпадают, т. е. $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = c$ для некоторого $c \in \{0, 1\}$. Сделаем замену $x^{\alpha_i} \rightarrow x_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Вновь полученную функцию от одной переменной, обозначим через $\varphi(x)$. Нетрудно проверить, что $\varphi(0) = \varphi(1) = c$, что и требовалось доказать.

Проиллюстрируем эту лемму на примере.

Пример 1. Определить, можно ли получить константу из функции $f(\tilde{x}^3) = x_3 \rightarrow x_1 x_2$.

Решение. Перейдем к табличному заданию этой функции. В таблице 7 стрелками одинаковой длины указаны противоположные наборы. Замечаем, что $f \notin S$, т. к. нарушается условие самодвойственности на первом и восьмом наборах: $f(000) = f(111) = 1$. Таким образом, константу 1 можно получить двумя способами.

	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_3 \rightarrow x_1 x_2$
→	0	0	0	0	1
→	0	0	1	0	0
→	0	1	0	0	1
→	0	1	1	0	0
→	1	0	0	0	1
→	1	0	1	0	0
→	1	1	0	1	1
→	1	1	1	1	1

Таблица 7

Сделаем следующую замену переменных:

$x^0 \rightarrow x_1, x^0 \rightarrow x_2, x^0 \rightarrow x_3$, тогда $f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \rightarrow \bar{x} \bar{x} = 1$.

Если сделать замену: $x^1 \rightarrow x_1, x^1 \rightarrow x_2, x^1 \rightarrow x_3$, тогда $f(x, x, x) = x \rightarrow x x = 1$. Константу ноль из заданной функции получить нельзя, т.к. не существует двух противоположных наборов, на которых функция принимает нулевое значение.

Лемма о несамодвойственной функции может быть использована для получения ряда тождеств для констант.

В примере 1 мы получили следующие тождества: $x \rightarrow x x = 1, \bar{x} \rightarrow \bar{x} \bar{x} = 1$. Эти тождества нетрудно доказать, используя тождества: $x \cdot x = x, x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, \bar{x} \vee x = 1$.

ЗАДАЧИ

3.1. Используя непосредственно определение двойственности булевых функций, а также основные тождества, выяснить, является ли функция g двойственной к функции f :

a) $f = x \oplus y, \quad g = x \leftrightarrow y;$

b) $f = x \mid y, \quad g = x \downarrow y;$

c) $f = x \rightarrow y, \quad g = \bar{x} \cdot y;$

d) $f = (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (y \rightarrow x), \quad g = (x \rightarrow y) \cdot (\bar{y} \rightarrow \bar{x});$

e) $f = x \cdot y \vee z, \quad g = x \cdot (y \vee z);$

f) $f = x \cdot y \rightarrow z, \quad g = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z.$

3.2. Используя принцип двойственности, построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции f . Полученную формулу по возможности упростить.

a) $f = (x \vee y \vee z) \cdot (y \oplus z) \vee x \cdot y \cdot z;$

b) $f = (x \vee (1 \rightarrow y)) \vee y \cdot \bar{z} \vee (\bar{x} \mid \overline{y \downarrow \bar{z}});$

c) $f = (x \downarrow y) \oplus ((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \leftrightarrow y \cdot z));$

d) $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee (y \cdot \bar{z} \oplus 1)) \downarrow z.$

3.3. Показать, что функция $x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$ является самодвойственной.

3.4. Найти все самодвойственные функции существенно зависящие от двух переменных.

3.5. Заменить прочерки в векторе $\tilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1

так, чтобы получился вектор самодвойственной функции:

a) $\tilde{\alpha}_f = (01-0-0--11-0-1--);$

b) $\tilde{\alpha}_f = (--01--11--01--10);$

c) $\tilde{\alpha}_f = (11--00--01--10--).$

3.6. Выяснить, является ли самодвойственной функция f , заданная векторно:

a) $\tilde{\alpha}_f = (01101001);$

b) $\tilde{\alpha}_f = (01111001);$

c) $\tilde{\alpha}_f = (10110110);$

d) $\tilde{\alpha}_f = (10101000).$

3.7. Выяснить, является ли функция f самодвойственной.

Если не является, то построить из f константу.

a) $f = x \oplus y \oplus z \oplus 1;$

b) $f = x \oplus y;$

c) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus x \cdot z \oplus y \oplus z;$

d) $f = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot t \vee x \cdot y \cdot z;$

e) $f = x \cdot y \vee z;$

f) $f = x \cdot y \oplus z \cdot (x \vee y).$

§ 4. Монотонность и класс монотонных функций.

Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и выполнены неравенства: $\alpha_i \geq \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, тогда будем говорить, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ больше или равен $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и обозначать через $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$. Если для наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ выполнено одно из двух неравенств: $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$ или $\tilde{\beta} \succeq \tilde{\alpha}$, то будем говорить, что наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ **сравнимы**. В противном случае, наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ **несравнимы**. Очевидно, что любые два соседних набора сравнимы.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется **монотонной**, если для любых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$ выполнено неравенство: $f(\tilde{\alpha}) \geq f(\tilde{\beta})$. В противном случае, функция называется **немонотонной**.

Множество всех монотонных функций от n переменных обозначим через $M(n)$.

Класс всех монотонных функций замкнут относительно операции суперпозиции, обозначим его через M , т.е. $[M] = M$.

Лемма 2 (о немонотонной функции). Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не является монотонной, то из нее с помощью подстановки констант 0, 1 и переменной x можно получить \bar{x} .

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ немонотонна, тогда найдется такая пара сравнимых наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$, а $f(\tilde{\alpha}) < f(\tilde{\beta})$, т. е. $f(\tilde{\alpha}) = 0$, $f(\tilde{\beta}) = 1$. Для каждого i ($i = 1, \dots, n$) выполнено либо $\alpha_i = \beta_i$, либо $\alpha_i > \beta_i$ (т. к. $\alpha_i \geq \beta_i$). В первом случае делаем замену α_i вместо переменной x_i , т. е. $\alpha_i \rightarrow x_i$, во втором – подставляем x вместо переменной x_i , т. е. $x \rightarrow x_i$. Вновь полученную функцию, обозначим через $\varphi(x)$. Тогда, нетрудно проверить, что $\varphi(0) = f(\tilde{\beta}) = 1$, $\varphi(1) = f(\tilde{\alpha}) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \bar{x}$. Утверждение доказано.

Замечание. Если функция не является монотонной, то найдется пара соседних наборов, на которых нарушается условие монотонности.

Следствие. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ немонотонна, то из нее с помощью подстановки констант: вместо $n - 1$ переменной и переменной x можно получить \bar{x} .

Доказательство. В силу замечания, найдется пара наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соседних по i -ой компоненте, таких что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$, на которых условие монотонности нарушается, т. е. $f(\tilde{\alpha}) < f(\tilde{\beta})$. Очевидно, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Сделаем следующую

подстановку $x_k \rightarrow \begin{cases} \alpha_k, & \text{если } k \neq i, \\ x, & \text{если } k = i, \end{cases}$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Вновь полученная функция будет зависеть от одной переменной, обозначим ее через $\varphi(x)$. Тогда, нетрудно проверить, что $\varphi(0) = f(\tilde{\beta}) = 1$, $\varphi(1) = f(\tilde{\alpha}) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \bar{x}$. Утверждение доказано.

Пример 1. Определить, можно ли получить функцию \bar{x} из функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3$.

Решение. Функция f немонотонна, т. к. $f(100) = 1$, $f(111) = 0$, значит по лемме о немонотонной функции из этой функции можно получить функцию \bar{x} . Сделаем следующую замену переменных: $1 \rightarrow x_1$, $x \rightarrow x_2$, $x \rightarrow x_3$, тогда получаем, что $f(1, x, x) = 1 \oplus x = \bar{x}$. Воспользуемся теперь следствием леммы, для этого надо выбрать пару соседних наборов, на которых нарушено условие монотонности. Имеем, $f(110) = 1$, а $f(111) = 0$. После подстановки переменной x и константы 1 , $1 \rightarrow x_1$, $1 \rightarrow x_2$, $x \rightarrow x_3$ получим, что $f(1, 1, x) = 1 \oplus 1 \cdot x = \bar{x}$.

Проверку на монотонность булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$, можно осуществить следующим образом. Разделим вектор $\tilde{\alpha}_f$ на

две равные части $\tilde{\alpha}_{f_0^1} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^{n-1}-1})$ и

$\tilde{\alpha}_{f_1^1} = (\alpha_{2^{n-1}}, \alpha_{2^{n-1}+1}, \dots, \alpha_{2^n-1})$. Если отношение

$\tilde{\alpha}_{f_0^1} \leq \tilde{\alpha}_{f_1^1}$ не выполнено, то $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной.

В противном случае каждый из векторов $\tilde{\alpha}_{f_\sigma^1}$ ($\sigma \in \{0, 1\}$) вновь

разделим на две равные части и проверим для них отношение предшествования. Если хотя бы одно из отношений не выполнено, то заключаем, что $f(\tilde{x}^n) \notin M$. В противном случае вновь делим векторы пополам и т. д. Если отношение предшествования выполняется для всех пар векторов, то $f(\tilde{x}^n) \in M$.

Пример 2. По вектору значений $\tilde{\alpha}_f = (10011111)$ выяснить, является ли функция f монотонной.

Решение. Поделим вектор пополам, тогда $1001 \leq 1111$. На следующем шаге отношение предшествования нарушается для пары 10 и 01, а $11 \leq 11$. Таким образом, заданная функция не является монотонной.

В силу замкнутости класса монотонных функций, можно утверждать, что всякая функция f , которая задана формулой, содержащей лишь связки $\&$ и \vee , монотонна.

Пример 3. Доказать, что функция $f = x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$ является монотонной.

Решение. Преобразуем f , применив тождество 6(a):
 $f = x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z = x \vee y \vee \bar{y}z = x \vee y \vee z$, т. о. функция f — монотонна.

ЗАДАЧИ

4.1. Какие из элементарных функций алгебры логики являются монотонными?

4.2. Выяснить, является ли монотонной функция f , заданная векторно:

- a) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$; b) $\tilde{\alpha}_f = (01010111)$;
c) $\tilde{\alpha}_f = (00110110)$; d) $\tilde{\alpha}_f = (00010011)$.

4.3. Выяснить, является ли функция f монотонной. Если не является, то построить из f функцию \bar{x} .

- a) $f = x \oplus y \oplus z$;
b) $f = xz \oplus y$;
c) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus x \cdot z \oplus x$;
d) $f = (x \oplus y) \cdot (x \leftrightarrow y)$;
e) $f = x \cdot \bar{y} \vee z$;
f) $f = x \cdot y \oplus z \cdot (x \vee y)$.

4.4. Доказать, что функция f является монотонной:

a) $f = (x \oplus y) \cdot (x \leftrightarrow y)$;

b) $f = x \rightarrow (y \rightarrow x)$;

c) $f = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$;

d) $f = (x \oplus y) \cdot x \cdot y$;

e) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus z \cdot x$.

4.5. Найти все монотонные функции, которые можно получить из вектора $\tilde{\alpha}_f$ заменой символа «—» на 0 или 1:

a) $\tilde{\alpha}_f = (0 -)$;

b) $\tilde{\alpha}_f = (- -)$;

c) $\tilde{\alpha}_f = (-00-)$;

d) $\tilde{\alpha}_f = (-10-)$;

e) $\tilde{\alpha}_f = (-----00-)$;

f) $\tilde{\alpha}_f = (----1--0-)$;

g) $\tilde{\alpha}_f = (0-----1)$.

4.6. Найти все функции $f \in M \cap S$, которые можно получить из вектора $\tilde{\alpha}_f$ заменой символа «—» на 0 или 1:

a) $\tilde{\alpha}_f = (- -)$;

b) $\tilde{\alpha}_f = (-0--)$;

c) $\tilde{\alpha}_f = (---1)$;

d) $\tilde{\alpha}_f = (-00-0---)$;

e) $\tilde{\alpha}_f = (-01-0---$

§ 5. Линейность и класс линейных функций.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *линейной*, если она не содержит нелинейные члены в полиноме Жегалкина, т. е. не содержит конъюнкции. Для линейной функции полином Жегалкина имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Класс всех линейных функций замкнут относительно операции суперпозиции, обозначим его через L , т. е. $[L] = L$.

Множество всех линейных функций от n переменных обозначим через $L(n)$. Так как линейная функция от n переменных определяется двоичным набором $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ длины $(n+1)$, получаем, что $|L(n)| = 2^{n+1}$.

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ линейная и существенно зависит от всех n переменных, то она имеет вид: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$, где $\alpha_0 \in \{0, 1\}$, т. е. таких функций только две.

Лемма 3 (о нелинейной функции). Если функция $f(\tilde{x}^n)$ нелинейная, то из нее с помощью подстановки констант: 0, 1, а также переменных $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ и, быть может, отрицания над всей функцией можно получить конъюнкцию $x_1 x_2$.

Доказательство. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ нелинейна относительно переменных x_1 и x_2 , тогда ее можно представить в виде: $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 f_1(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus x_2 f_3(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus f_4(x_3, x_4, \dots, x_n)$, где функция $f_1(x_3, x_4, \dots, x_n) \neq 0$ (не равна тождественно нулю), т. е. существуют такие $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$, что значение функции на них равно единице, т. е. $f_1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = 1$. Подставим вместо переменных x_i константы α_i , где $i = 3, 4, \dots, n$, в левую и правую часть. Получим, что $f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \lambda$, где $\alpha = f_2(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$, $\beta = f_3(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$, $\lambda = f_4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$. Вновь полученную функцию от двух переменных, обозначим через $\Psi(x_1, x_2)$. Нетрудно показать, что $\Psi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \lambda = x_1 x_2$. Таким образом, окончательно получаем, что

$$f(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \oplus \alpha\beta \oplus \lambda = x_1 x_2.$$

Лемма доказана.

Проиллюстрируем лемму о нелинейной функции на примере.

Пример 1. Определить, можно ли получить функцию $x_1 x_2$ из функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2}$.

Решение. Построим полином Жегалкина для заданной функции.
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2 x_3} \cdot \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1 x_2 x_3} \cdot \overline{x_1 x_2} \oplus 1 =$$
$$= (x_1 x_2 x_3 \oplus 1) \cdot (x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1.$$

Получили, что $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1$, т. е. функция $f(x_1, x_2, x_3)$ нелинейна относительно переменных x_1 и x_2 , и по лемме о нелинейной функции из нее можно получить конъюнкцию $x_1 x_2$. Представим ее в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (x_3 \oplus 1) \oplus x_1.$$

Построим функцию от двух переменных $\Psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, 0) = x_1 x_2 \oplus x_1$. Таким образом, имеем $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\lambda = 0$, тогда $\Psi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \lambda = \Psi(x_1, x_2 \oplus 1) =$
$$= x_1(x_2 \oplus 1) \oplus x_1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 = x_1 x_2.$$

Закключаем, что конъюнкцию $x_1 x_2$ можно получить из функции $f(x_1, x_2, x_3)$ заменой переменных x_2 на $\overline{x_2}$, x_3 на 0, действительно, $f(x_1, \overline{x_2}, 0) = x_1 x_2$.

ЗАДАЧИ

5.1. Какие из элементарных функций алгебры логики являются линейными?

5.2. Выяснить, является ли линейной функция f , заданная векторно:

a) $\tilde{\alpha}_f = (1001)$;

b) $\tilde{\alpha}_f = (1101)$;

c) $\tilde{\alpha}_f = (10010110)$;

d) $\tilde{\alpha}_f = (11000011)$;

e) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$;

f) $\tilde{\alpha}_f = (10100110)$;

g) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$;

h) $\tilde{\alpha}_f = (0110100101101001)$;

i) $\tilde{\alpha}_f = (1010010110011100)$;

j) $\tilde{\alpha}_f = (1010010101011010)$.

5.3. Выяснить, является ли функция f линейной. Если не является, то построить из f функцию $x \cdot y$:

a) $f = x \rightarrow y$;

b) $f = x \cdot y \vee y \cdot \bar{z} \vee \bar{z} \cdot x$;

c) $\tilde{\alpha}_f = (11101000)$;

d) $\tilde{\alpha}_f = (11011011)$;

e) $\tilde{\alpha}_f = (0111101111111100)$;

f) $\tilde{\alpha}_f = (1110100110010111)$;

g) $f = (x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z) \oplus \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$;

h) $f = x \rightarrow (y \rightarrow z)$;

i) $f = x \cdot \bar{y} \vee y \cdot \bar{z} \vee z \cdot \bar{x}$.

5.4. Заменить в векторе $\tilde{\alpha}_f$ прочерки символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f . Выразить f полиномом.

a) $\tilde{\alpha}_f = (10 - 1);$

b) $\tilde{\alpha}_f = (0 - 11);$

c) $\tilde{\alpha}_f = (-001 - -1 -);$

d) $\tilde{\alpha}_f = (1 - 101 - - -);$

e) $\tilde{\alpha}_f = (-0 - 1 - - 00);$

f) $\tilde{\alpha}_f = (11 - 0 - - - 1);$

g) $\tilde{\alpha}_f = (- - 10 - - - - 0 - - 1 - 110);$

h) $\tilde{\alpha}_f = (1 - - - - - - - - - 0 - 110).$

5.5. Найти число линейных функций $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящих в точности от k переменных.

5.6. Найти число линейных функций $f(\tilde{x}^n)$ таких, что $f(0, 0, \dots, 0) = f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

5.7. Доказать, что линейная функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда она существенно зависит от нечетного числа переменных.

§ 6. Классы функций, сохраняющих константы.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *сохраняет константу 0* (*константу 1*), если $f(\tilde{0}^n) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$ (соответственно если $f(\tilde{1}^n) = f(1, 1, \dots, 1) = 1$). Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 0 (константу 1), обозначается через T_0 (соответственно через T_1). Каждый из классов T_0 и T_1 является замкнутым относительно операции суперпозиции.

Множество всех функций из T_0 (T_1), зависящих от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , будем обозначать через $T_0(n)$ (соответственно через $T_1(n)$). Легко подсчитать, что

$$|T_0(n)| = |T_1(n)| = 2^{2^n - 1}.$$

Пример 1. Найти число функций $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащих множеству $A = T_0 \cap T_1$.

Решение. Если $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1$, тогда значения функции $f(\tilde{x}^n)$ можно произвольно выбирать на всех двоичных наборах, кроме нулевого и единичного, т.е. на $(2^n - 2)$ наборах. Такой выбор осуществляется $2^{2^n - 2}$ способами. Таким образом,

$$|A| = 2^{2^n - 2}.$$

ЗАДАЧИ

6.1. Выяснить, при каких n функция $f(\tilde{x}^n)$ принадлежит множеству $T_0 \setminus T_1$:

$$a) f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n;$$

$$b) f(\tilde{x}^n) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \right) \oplus x_n x_1;$$

$$c) f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j;$$

$$d) f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \vee x_j);$$

$$e) f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_3) \dots (x_n \rightarrow x_1).$$

6.2. Подсчитать число функций $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащих множеству A :

$$a) A = T_0 \cup T_1;$$

$$b) A = T_0 \cap L;$$

$$c) A = S \cap T_1;$$

$$d) A = T_0 \cup L;$$

$$e) A = L - T_1;$$

$$f) A = (T_1 \cup L) \cap S;$$

$$g) A = S \cap T_1 \cap L;$$

$$h) A = T_0 \cup L \cup S.$$

6.3. Найти все самодвойственные монотонные функции $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящие от всех переменных ($n=1,2,3,4$).

6.4. Доказать, что

$$L \cap T_0 \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 = L \cap S \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 \cap T_1.$$

6.5. Доказать, что $L \subseteq T_1 \cup T_0 \cup S$.

6.6. Доказать, что множество A не пусто:

$$a) A = LT_1 - (T_0 \cup S); \quad b) A = LT_0 - (T_1 \cup S);$$

$$c) A = LS - (T_1 \cup T_0).$$

6.7. Какие функции можно получить из функции $f(\tilde{x}^n)$ путем отождествления переменных, если:

$$a) f \in L - T_1 S;$$

$$b) f \in T_1 - T_0;$$

$$c) f \in T_0 - T_1;$$

$$d) f \in S - T_0;$$

$$e) f \in S - T_1;$$

$$f) f \in T_1 - \overline{T_0};$$

$$g) f \in \overline{T_1} - T_0;$$

$$h) f \in \overline{T_1 - T_0}.$$

6.8. Показать, что всякая монотонная функция содержится не менее, чем в двух классах из T_0, T_1, L .

6.9. Доказать, что функция, двойственная монотонной функции, монотонна.

6.10. Доказать, что монотонная функция, не сохраняющая нуль (единицу), равна тождественно единице (нулю).

6.11. Доказать, что если f тождественно не равна константе, а $(f \vee f^*)$ — константа, то $f \notin M \cup S$.

§ 7. Полнота и замкнутые классы.

Пусть задана система функций F . Замыканием $[F]$ множества F называется совокупность всех функций из P_2 , являющихся суперпозициями функций из множества F . Система F называется *замкнутой*, если $[F]=F$.

Система F называется *полной*, если $[F]=P_2$, т. е. если любая функция алгебры логики может быть выражена через суперпозицию функций из множества F .

Система $\{\&, \vee, \bar{}\}$ (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание) полна, т. к. любую булеву функцию можно представить в виде СДНФ или СКНФ.

Из представления функции в виде полинома Жегалкина следует, что система функций $\{\&, \oplus, 0, 1\}$ также полна.

Дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание, а конъюнкцию через отрицание и дизъюнкцию (по закону де Моргана):

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}} \qquad x \& y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}.$$

Следовательно, системы $\{\bar{}, \&\}$ и $\{\bar{}, \vee\}$ будут полными.

Теорема Поста о полноте. Система функций F полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов: T_0 , T_1 , S , M , L .

Доказательство. **Необходимость** докажем от противного.

Пусть система F полна и включена в один из пяти классов T_0, T_1, S, M, L , т. е. $F \subseteq A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$, где A один из пяти замкнутых классов. Тогда $[F] = P_2$, т.е. $P_2 = [A]$, а так как класс A замкнут, то один из пяти классов совпадает с множеством всех булевых функций, что ведет к противоречию.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы, т. е. существуют функции, которые не принадлежат соответствующим классам. Пусть $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_s \notin S, f_m \notin M, f_L \notin L$, возможно, что некоторые из этих функций равны между собой. Покажем, что через суперпозицию этих функций можно выразить отрицание и конъюнкцию, тогда любая функция может быть выражена через суперпозицию функций из множества F .

1 этап. Получение констант: 0, 1.

a) Пусть $f_1(\tilde{0}^n) = 0$, тогда $f_1(x, \dots, x) = 0$. Вторую константу получаем из f_0 :

$$f_0(f_1(x, \dots, x), f_1(x, \dots, x), \dots, f_1(x, \dots, x)) = 1.$$

b) Если $f_1(\tilde{0}^n) = 1$, тогда $f_1(x, \dots, x) = \bar{x}$. По лемме о несамодвойственной функции из функции $f_s \notin S$ и отрицания можно получить константу, обозначим ее через c . Вторую константу получаем из $f_1 \notin T_1, f_1(c, \dots, c) = \bar{c}$.

2 этап. Получение отрицания.

По лемме о немонотонной функции из функции $f_m \notin M$ с помощью подстановки констант, которые были получены через суперпозицию на первом этапе, и переменной x получаем \bar{x} .

3 этап. Получение конъюнкции.

По лемме о нелинейной функции из $f_L \notin L$ с помощью подстановки констант и отрицания можно получить конъюнкцию. Константы и отрицание были получены через суперпозицию на первом и втором этапах. Теорема доказана.

Полная система F называется *базисом*, если никакая ее подсистема не является полной.

Следствие 1. Базис состоит не более чем из четырех функций.

Доказательство. Из доказательства теоремы следует, что система функций $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_L\}$ полна.

На первом этапе, при получении констант, в случае *a)* имеем $f_1(x, \dots, x) = 0$, следовательно, $f_1 \notin S$, тогда система $\{f_0, f_1, f_m, f_L\}$ полна.

В случае *b)* $f_1(x, \dots, x) = \bar{x}$, следовательно, $f_1 \notin T_0$, тогда система $\{f_1, f_s, f_m, f_L\}$ также полна.

Замкнутый класс F , не совпадающий с множеством всех булевых функций, называется *предполным*, если при добавлении к нему произвольной функции из P_2 , не принадлежащей F , вновь полученная система будет полной, т. е. для $\forall f \notin F$ система $F \cup \{f\}$ полна.

Следствие 2. Существует только пять предполных классов T_0, T_1, S, M, L .

Следствие 3. Всякий замкнутый класс содержится в одном из пяти классов T_0, T_1, S, M, L .

Утверждение доказывается от противного.

Пример 1. Выяснить, полна ли система функций $\{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$.

Решение. Составим для этой системы таблицу принадлежности функций каждому из классов T_0, T_1, S, M, L .

	T_0	T_1	S	M	L
xy	+	+	—	+	—
0	+	—	—	+	+
1	—	+	—	+	+
$x \oplus y \oplus z$	+	+	+	—	+

Таблица 8

Эта система полна, т. к. она не содержится целиком ни в одном из замкнутых классов (каждый столбец таблицы 8

содержит не менее одного минуса). Покажем, что она образует базис, для этого достаточно показать, что у нее нет полной подсистемы, отличной от нее самой. Функция $x \oplus y \oplus z$ обязательно входит в базис, т. к. только она не монотонна. Функция xy входит в базис, т. к. только она не линейна. Константа 0 входит в базис, т. к. только 0 не принадлежит классу T_1 . Константа 1 является единственной функцией системы, не принадлежащей классу T_0 , поэтому она входит в базис. Таким образом, все 4 функции входят в любую полную подсистему.

Из примера 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 4. Существует базис состоящий из четырех функций.

Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется **шефферовой** (или функцией Шеффера от n переменных), если она полна, т. е. образует базис в P_2 . Нетрудно проверить, что штрих Шеффера и стрелка Пирса являются функциями Шеффера от двух переменных.

Пример 2. Доказать полноту системы функций $G = \{f(x, y, z) = xy \rightarrow z, g(x, y) = x \oplus y\}$. Проиллюстрировать поэтапное доказательство теоремы Поста, т. е. выразить константы, отрицание и конъюнкцию через функции системы G .

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = xy \rightarrow z$, построим для нее таблицу значений (см. табл. 9).

x	y	z	$xy \rightarrow z$	$x \oplus y \oplus z$	$x \oplus y \oplus z \oplus 1$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Таблица 9

Очевидно, что f не самодвойственна и не монотонна, т. к. условие монотонности нарушается на третьем и седьмом наборах: $f(0,1,0)=1, f(1,1,0)=0$. Нетрудно проверить, что у этой функции все переменные существенные, т. к. она принимает значение 0 только на одном наборе, для которого найдутся соседние наборы по первой, по второй и по третьей переменным, значения функций на которых равны 1. Если бы эта функция была линейна, то она совпала бы с функцией $x \oplus y \oplus z$ или $x \oplus y \oplus z \oplus 1$ (см. табл.9). Заключаем, что функция f не линейна.

Вторая функция $g(x,y)=x \oplus y$ на нулевом и на единичном наборах принимает значение 0. Найдем для нее двойственную функцию: $g^*(x,y)=\overline{x \oplus y}=(x \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) \oplus 1=x \oplus y \oplus 1$. Из единственности представления функции в виде полинома

Жегалкина, получаем, что g не самодвойственна. Эта функция не монотонна, т. к. условие монотонности нарушается на наборах $(0,1)$ и $(1,1)$.

Принадлежность функций f и g каждому из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L показана в таблице 10.

	T_0	T_1	S	M	L
$xy \rightarrow z$	—	+	—	—	—
$x \oplus y$	+	—	—	—	+

Таблица 10

По теореме Поста делаем вывод, что система функций $G = \{f(x, y, z) = xy \rightarrow z, g(x, y) = x \oplus y\}$ полна.

Проиллюстрируем теперь теорему Поста.

1) Получение констант. Имеем, $f(0,0,0) = f(1,1,1) = 1$, следовательно, $f(x, x, x) = 1$, т. о. константу 1 можно выразить в виде формулы $xx \rightarrow x = 1$. Так как $g(0,0) = g(1,1) = 0$, то $g(x, x) = 0$, или в виде формулы $x \oplus x = 0$.

2) Получение отрицания. По лемме о немонотонной функции имеем $f(x, 1, 0) = \bar{x}$ или в виде формулы $x \cdot 1 \rightarrow 0 = \bar{x}$. Аналогично, применяя эту лемму для второй функции, получим, что $g(1, x) = \bar{x}$ или в виде формулы $1 \oplus x = \bar{x}$. Подставим вместо 1 ее выражение в виде $f(x, x, x) = 1$, тогда получим, что $g(f(x, x, x), x) = \bar{x}$ или в формульном виде $(xx \rightarrow x) \oplus x = \bar{x}$.

3) Получение $\&$. Найдем полином Жегалкина для функции $f(x, y, z) = xy \rightarrow z$. СКНФ для нее имеет следующий вид: $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$. Воспользовавшись законом де Моргана, тождеством для отрицания и дистрибутивностью (для сложения и конъюнкции), получим полином $xy\bar{z} \oplus 1 = xyz \oplus xy \oplus 1$. По лемме о нелинейной функции имеем $xy = \overline{f(x, y, 0)}$. Подставляя выражение константы 0 в виде суперпозиции, получим, что $\overline{xy} = f(x, y, g(x, x))$ (обозначим правую часть этого выражения через A) или в виде формулы $\overline{xy} = xy \rightarrow (x \oplus x)$. Наконец, применив выражение отрицания через суперпозицию функций исходной системы, имеем $g(f(x, x, x), A) = xy$. В формульном виде получим, что $(xx \rightarrow x) \oplus (xy \rightarrow (x \oplus x)) = xy$. Итак, отрицание и конъюнкцию выразили через функции системы G .

Пример 3. Выразить функцию $f = x \downarrow \bar{y}$ через функции системы $G = \{f(x, y, z) = xy \rightarrow z, g(x, y) = x \oplus y\}$.

Решение. Выразим функцию f через конъюнкцию и отрицание: $f = \bar{x} \cdot y$. Используя выражения для отрицания и конъюнкции через функции системы G (см. пример 2), получаем $f = g(f(x, x, x), f(g(f(x, x, x), x), y, g(x, x)))$, или в виде формулы: $f = (xx \rightarrow x) \oplus (((xx \rightarrow x) \oplus x)y \rightarrow (x \oplus x)) = \bar{x}y$.

ЗАДАЧИ

7.1. Выяснить, полна ли данная система функций. Если полна, то проиллюстрировать поэтапное доказательство теоремы Поста, т. е. получить через суперпозицию функций из этой системы константы, отрицание и конъюнкцию.

$$a) \{ x \rightarrow yz, xz \leftrightarrow xy, xy \oplus yz \};$$

$$b) \{ (xy \vee xz) \oplus yz, x \vee y, \bar{x} \rightarrow xy, x \leftrightarrow \bar{y} \};$$

$$c) \{ xy \vee xz \vee yz, xy \rightarrow \bar{z}, (xy \vee xz) \oplus yz \};$$

$$d) \{ xz \leftrightarrow xy, (xy \vee xz) \oplus yz, xy \rightarrow \bar{z}, x \leftrightarrow \bar{y} \};$$

$$e) \{ x\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z}, (xy \vee xz) \oplus yz, \overline{xyz \leftrightarrow xz} \};$$

$$f) \{ x \leftrightarrow xz, xz \leftrightarrow xy, (xy \vee xz) \oplus yz, x \vee y, x \oplus y \};$$

$$g) \{ x \vee y, x \oplus y, x \rightarrow y, 0 \}.$$

7.2. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:

$$a) A = \{ f_1 = (0110), f_2 = (1100\ 0011), f_3 = (1001\ 0110) \};$$

$$b) A = \{ f_1 = (0111), f_2 = (0101\ 1010), f_3 = (0111\ 1111) \};$$

$$c) A = \{ f_1 = (0111), f_2 = (1001\ 0110) \};$$

$$d) A = \{ f_1 = (0101), f_2 = (1110\ 1000), f_3 = (0110\ 1001) \};$$

$$e) A = \{ f_1 = (1001), f_2 = (1110\ 1000) \};$$

$$f) A = \{ f_1 = (11), f_2 = (0111), f_3 = (0011\ 0111) \};$$

$$g) A = \{ f_1 = (10), f_2 = (0011\ 0111) \}.$$

7.3. Полна ли система $F = \{f(\tilde{x}^n), g(\tilde{x}^n)\}$, если:

a) $f \in S - M$, $g \notin L \cup S$, $f \rightarrow g \equiv 1$;

b) $f \in \overline{T_0 \cup L}$, $g \notin S$, $f \rightarrow g \equiv 1$;

c) $f \in \overline{T_0} \cup \overline{T_1}$, $g \in M - T_1$, $f \rightarrow g \equiv 1$;

d) $f \in SL - T_0$, $g \in M - T_1L$, $f \rightarrow g \equiv 1$?

7.4. Выяснить, полна ли система функций $A = \{f, g, h\}$, если выполнены следующие условия: $f \notin L \cup T_0 T_1$, $g \in M - L$, $f \rightarrow g \equiv 1$, $f \vee h \equiv 1$?

7.5. Привести примеры базисов, содержащих одну, две, три и четыре функции.

7.6. Перечислить все различные базисы, содержащие только функции, существенно зависящие от двух переменных.

7.7. Найти все функции Шеффера от двух переменных.

7.8. Доказать, что если $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, то f — функция Шеффера.

7.9. Сколько существует функций Шеффера от n переменных?

7.10. Верно ли, что если $f \notin L \cup S \cup M$, то f полна?

7.11. Опровергнуть, что

a) если $f \notin (T_0 \cup T_1) - S$, то $f \in L \cup M$;

b) если $f \in \overline{T_0} \overline{T_1} \overline{M}$, то f — функция Шеффера;

c) если $f \notin T_0 \cup S \cup M$, то $f \in L \overline{T_1} S \overline{M}$;

d) если $f \notin L \cup S \cup M$, то f — функция Шеффера.

7.12. Полна ли система функций A ? Если полна, то привести пример полной системы функций из множества A .

a) $A = P_2 - (T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M)$;

b) $A = (M - T_0) \cup (L - S)$.

7.13. Верно ли, что $f \in [g]$ или $g \in [f]$?

a) $f = x \oplus y$, $g = xy$;

b) $f = x \oplus y$, $g = x \rightarrow y$;

c) $f = x \rightarrow y$, $g = xy$;

d) $f = x \rightarrow y$, $g = x \vee y$;

e) $f = x \leftrightarrow y$, $g = x \vee y$;

f) $f = x \leftrightarrow y$, $g = xy$;

g) $f = x \rightarrow y$, $g = xy \oplus xz \oplus yz$;

h) $f = x \oplus y$, $g = xy \oplus xz \oplus yz$;

i) $f = x \oplus y$, $g = xy \rightarrow z$;

j) $f = x \rightarrow y$, $g = xy \oplus z$;

k) $f = x \leftrightarrow y$, $g = xy \oplus z$;

l) $f = x \rightarrow y$, $g = \bar{x}$.

Список литературы

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
2. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. — М.: Наука, 1992.
5. Алексеев В. Е., Белова Р. В. Представление булевых функций формулами и схемами. — Методическая разработка, 1986.

Оглавление.

§ 1. Булевы функции или функции алгебры логики.....	3
§ 2. Специальные представления булевых функций.....	14
§ 3. Двойственность и класс самодвойственных функций.....	24
§ 4. Монотонность и класс монотонных функций.....	30
§ 5. Линейность и класс линейных функций.....	36
§ 6. Классы функций, сохраняющих константы.....	41
§ 7. Полнота и замкнутые классы.....	44
§ 8. Диаграмма Венна для классов T_0, T_1, S, L, M	55
Список литературы.....	56

Проверку на монотонность булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$, можно осуществить следующим образом. Разделим вектор $\tilde{\alpha}_f$ на

две равные части $\tilde{\alpha}_{f_0^1} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^{n-1}-1})$ и

$\tilde{\alpha}_{f_1^1} = (\alpha_{2^{n-1}}, \alpha_{2^{n-1}+1}, \dots, \alpha_{2^n-1})$. Если отношение

$\tilde{\alpha}_{f_0^1} \leq \tilde{\alpha}_{f_1^1}$ не выполнено, то $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной.

В противном случае каждый из векторов $\tilde{\alpha}_{f_\sigma^1}$ ($\sigma \in \{0, 1\}$) вновь

разделим на две равные части и проверим для них отношение предшествования. Если хотя бы одно из отношений не выполнено, то заключаем, что $f(\tilde{x}^n) \notin M$. В противном случае вновь делим векторы пополам и т. д. Если отношение предшествования выполняется для всех пар векторов, то $f(\tilde{x}^n) \in M$.

Пример 2. По вектору значений $\tilde{\alpha}_f = (10011111)$ выяснить, является ли функция f монотонной.

Решение. Поделим вектор пополам, тогда $1001 \leq 1111$. На следующем шаге получаем: $10 > 01$ (отношение предшествования нарушается) и $11 \leq 11$. Таким образом, заданная функция не является монотонной.