

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

---

Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра математической логики и высшей алгебры

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Решение задач

Нижний Новгород, 2000



УДК: 512.1

Линейные преобразования. Решение задач: Методическая разработка по курсу “Геометрия и алгебра” для студентов специальностей “Прикладная математика”, “Информационные системы” / Составители: С. И. Веселов, Н. Ю. Золотых, Т. Г. Смирнова. – Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 2000. – 32 с.

Методическая разработка предназначена для студентов 1-го курса факультета ВМК специальностей “Прикладная математика”, “Информационные системы” и содержит теоретическое введение, примеры решения задач и контрольные задания по теме “Линейные преобразования”.

Составители:

С. И. Веселов, к.ф.-м.н., доц. каф. МЛиВА,  
Н. Ю. Золотых, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА,  
Т. Г. Смирнова, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА.

Рецензент:

А. В. Баркалов, к.ф.-м.н., доц. каф. МО.

Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского

2000



## 1. Теоретическое введение

Рассмотрим конечномерное<sup>1</sup> линейное пространство  $V$ , заданное над полем  $F$ . Отображение  $\varphi : V \rightarrow V$  называется *линейным преобразованием* пространства  $V$  (или *линейным оператором*, действующим в пространстве  $V$ ), если для произвольных  $x, y \in V$  и произвольного  $\alpha \in F$  имеют место следующие равенства:

$$1) \quad \varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y,$$

$$2) \quad \varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x).$$

*Образом* (или *множеством значений*) преобразования  $\varphi$  называется множество

$$\text{Im } \varphi = \varphi V = \{\varphi x : x \in V\}.$$

*Ядром* преобразования  $\varphi$  называется множество

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in V : \varphi x = o\}.$$

Образ и ядро линейного преобразования являются подпространствами в  $V$ . Их размерности называются соответственно рангом и дефектом преобразования и обозначаются соответственно  $\text{rank } \varphi$  и  $\text{def } \varphi$ . Справедливо равенство

---

<sup>1</sup>Приведенные далее определения: линейного преобразования, нулевого и тождественного преобразований, преобразований проектирования и отражения, обратного преобразования, образа и ядра, произведения преобразования на число, произведения и суммы преобразований, собственного вектора, инвариантного и собственного подпространств — распространяются и на случай бесконечномерных пространств.



$\text{rank } \varphi + \text{def } \varphi = \dim V$ . Преобразование  $\varphi$  называется *вырожденным*, если  $\text{def } \varphi > 0$ . Преобразование  $\varphi$  называется *невырожденным*, если  $\text{def } \varphi = 0$ .

Произведением преобразования  $\varphi : V \rightarrow V$  на число  $\alpha \in F$  называется отображение  $\alpha\varphi$ , определяемое равенством  $(\alpha\varphi)x = \alpha(\varphi x)$  для произвольного  $x \in V$ . Суммой преобразований  $\varphi, \psi : V \rightarrow V$  называется отображение  $\varphi + \psi$ , определяемое равенством  $(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x$  для произвольного  $x \in V$ . Произведением (или композицией) преобразований  $\varphi, \psi : V \rightarrow V$  называется отображение  $\varphi\psi$ , определяемое равенством  $(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x)$  для произвольного  $x \in V$ . Преобразование называется *обратным* к преобразованию  $\varphi$  и обозначается  $\varphi^{-1}$ , если  $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ . Для преобразования  $\varphi$  обратное существует и единственно тогда и только тогда, когда  $\varphi$  невырождено.

Пусть  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис пространства  $V$ . Матрицей преобразования  $\varphi$  в базисе  $\mathbf{e}$  называется матрица  $[\varphi]_{\mathbf{e}} \in F^{n \times n}$ , составленная из координатных столбцов<sup>2</sup>  $[\varphi e_j]_{\mathbf{e}}$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Для произвольного  $x \in V$  имеем

$$[\varphi x]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}}.$$

Линейное преобразование однозначно восстанавливается по образам базисных векторов. Если  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  — два базиса пространства  $V$ , а  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$  — матрица перехода<sup>3</sup> от  $\mathbf{e}$  к  $\mathbf{e}'$ ,

---

<sup>2</sup>Координатный столбец вектора  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  мы обозначаем  $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$ .

<sup>3</sup>Матрица  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ , где  $e'_j = \alpha_{1j} e_1 + \dots + \alpha_{nj} e_n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), называется матрицей перехода от базиса  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$



то

$$[\varphi]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1} [\varphi]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}.$$

Матрицы  $A$ ,  $B$  называются *подобными*, если  $B = Q^{-1}AQ$  для некоторой невырожденной матрицы  $Q$ . При этом матрица  $Q$  называется *трансформирующей*.

Образ преобразования  $\varphi$  является линейной оболочкой векторов, координатные столбцы которых в базисе  $\mathbf{e}$  суть столбцы матрицы  $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ . Ранг преобразования совпадает с рангом матрицы этого преобразования (каков бы ни был базис). Ядро преобразования определяется из системы уравнений  $[\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}} = 0$ .

Для произвольных линейных преобразований  $\varphi$ ,  $\psi$  пространства  $V$  и произвольного числа  $\alpha \in F$  справедливы равенства

$$[\alpha\varphi]_{\mathbf{e}} = \alpha[\varphi]_{\mathbf{e}}, \quad [\varphi + \psi]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}} + [\psi]_{\mathbf{e}}, \quad [\varphi\psi]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[\psi]_{\mathbf{e}}.$$

Для невырожденного преобразования  $\varphi$  справедливо равенство  $[\varphi^{-1}]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}^{-1}$ .

Подпространство  $W$  линейного пространства  $V$  называется *инвариантным* относительно преобразования  $\varphi$ , если  $\varphi W \subseteq W$ , т.е.  $\varphi x \in W$  для любого  $x$  из  $W$ . *Сужением* (или *ограничением*) преобразования  $\varphi$  на инвариантное подпространство  $W$  называется преобразование  $\psi : W \rightarrow W$ , такое, что  $\psi x = \varphi x$  для любого  $x \in W$ . Говорят также, что на инвариантном подпространстве  $W$  преобразование  $\varphi$  *индуцирует* преобразование  $\psi$ .

---

к базису  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ .



Ненулевой вектор  $x \in V$  называется *собственным вектором* преобразования  $\varphi$ , если  $\varphi x = \lambda x$  для некоторого  $\lambda \in F$ . Число  $\lambda$  при этом называется *собственным значением* (числом) преобразования  $\varphi$ . Говорят также, что собственный вектор  $x$  *относится* к собственному значению  $\lambda$  (или *принадлежит* собственному значению  $\lambda$ ). Множество всех собственных векторов, относящихся к одному собственному значению  $\lambda$ , дополненное нулевым вектором, является подпространством и называется *собственным подпространством*.

Вектор  $x$  является собственным вектором преобразования  $\varphi$  тогда и только тогда, когда его координатный столбец  $[x]_{\mathbf{e}}$  является нетривиальным решением системы линейных уравнений<sup>4</sup>

$$([\varphi]_{\mathbf{e}} - \lambda E)[x]_{\mathbf{e}} = 0.$$

Для существования такого  $x$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\det([\varphi]_{\mathbf{e}} - \lambda E) = 0.$$

Это уравнение, рассматриваемое относительно неизвестного  $\lambda$ , называется *характеристическим уравнением преобразования  $\varphi$* . Оно не изменяется при замене базиса. Левая часть характеристического уравнения есть многочлен от  $\lambda$  степени  $n = \dim V$ . Этот многочлен называется *характеристическим многочленом преобразования  $\varphi$* .

---

<sup>4</sup>Через  $E$  обозначена единичная матрица.



*Алгебраической кратностью* собственного значения  $\lambda$  называется кратность числа  $\lambda$  как корня характеристического многочлена. *Геометрической кратностью* собственного значения  $\lambda$  называется размерность собственного подпространства, относящегося к собственному значению  $\lambda$ . Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности. Собственные векторы, относящиеся к разным собственным значениям, линейно независимы.

*Все недиагональные элементы  $j$ -го столбца матрицы  $[\varphi]_{\mathbf{e}}$  равны нулю тогда и только тогда, когда  $j$ -ый вектор базиса — собственный. При этом на диагонали в  $j$ -ом столбце матрицы  $[\varphi]_{\mathbf{e}}$  находится собственное число.* Матрица  $[\varphi]_{\mathbf{e}}$  диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса  $\mathbf{e}$  собственные. При этом на диагонали находятся соответствующие собственные числа. Преобразование называется *диагонализруемым*, если существует базис, в котором матрица преобразования диагональна.

Минор матрицы  $A \in F^{n \times n}$  называется *диагональным* (или *главным*), если в нем с каждой строкой участвует столбец матрицы  $A$  с таким же номером. Сумма диагональных элементов (сумма главных миноров первого порядка) матрицы  $A$  называется ее *следом* и обозначается  $\text{tr } A$ . Многочлен

$$\det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + s_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + s_{n-1}(-\lambda) + s_n$$

называется *характеристическим многочленом матрицы*  $A \in F^{n \times n}$ . Коэффициент  $s_k$  этого многочлена равен сумме



диагональных миноров порядка  $k$ . В частности,  $s_1 = \operatorname{tr} A$ ,  $s_n = \det A$ . Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

*Нулевое преобразование*  $\theta$  определяется равенством  $\theta x = 0$  для всех  $x \in V$ . *Тождественное преобразование*  $\varepsilon$  определяется равенством  $\varepsilon x = x$  для всех  $x \in V$ .

Пусть пространство  $V$  раскладывается в прямую сумму подпространств:  $V = V_1 \dot{+} V_2$ , тогда для произвольного  $x \in V$  определяются единственным образом векторы  $x_1 \in V_1$ ,  $x_2 \in V_2$ , такие, что  $x = x_1 + x_2$ . Преобразование  $\varphi$ , определяемое формулой  $\varphi x = x_1$ , называется *проектированием* пространства  $V$  на подпространство  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Преобразование  $\varphi$ , определяемое формулой  $\varphi x = x_1 - x_2$ , называется *отражением* пространства  $V$  в подпространстве  $V_1$  параллельно  $V_2$  (или *симметрией* относительно  $V_1$  параллельно  $V_2$ ). Если пространство  $V$  — унитарное (евклидово), а подпространство  $V_2$  является ортогональным дополнением к  $V_1$ , то проектирование и отражение на (в)  $V_1$  параллельно  $V_2$  называются соответственно *ортогональным проектированием* и *ортогональным отражением*.

## 2. Примеры решения задач

**Пример 1.** Линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит линейно независимые векторы  $a_1 = (1, 1, 1)^\top$ ,  $a_2 = (1, 2, 0)^\top$ ,  $a_3 = (1, 0, -1)^\top$



соответственно в векторы  $b_1 = (3, 5, 0)^\top$ ,  $b_2 = (3, 6, -1)^\top$ ,  $b_3 = (-3, -8, 1)^\top$ . Найти матрицу этого преобразования:

а) в стандартном базисе  $e_1 = (1, 0, 0)^\top$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)^\top$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)^\top$ ;

б) в базисе  $a_1, a_2, a_3$ .

РЕШЕНИЕ. Искомое преобразование существует и единственно, так как векторы  $a_1, a_2, a_3$  — линейно независимые и, следовательно, составляют базис трехмерного арифметического пространства.

а) Имеют место соотношения  $b_i = [\varphi]_e a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые могут быть записаны в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = [\varphi]_e \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение будем решать при помощи элементарных преобразований над столбцами расширенной матрицы:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Приведем два способа решения.

Способ 1. Матрицу линейного преобразования в базисе  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ищем по формуле  $[\varphi]_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ , где

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{a}$ . Найдем обратную матрицу<sup>5</sup>:

---

<sup>5</sup>Обращение матрицы  $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$  и нахождение произведения  $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}$  можно выполнить одновременно, решив одно матричное уравнение  $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}X = [\varphi]_{\mathbf{e}}$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Столбцы матрицы  $[\varphi]_{\mathbf{a}}$  представляют собой столбцы координат векторов  $b_1, b_2, b_3$  в базисе  $\mathbf{a}$ . Для нахождения этих координат решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} [\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & | & 5 & 6 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7/3 & 10/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$



Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** Преобразование трехмерного пространства геометрических векторов заключается в проектировании на прямую  $x = 2t$ ,  $y = t$ ,  $z = -t$  параллельно плоскости  $x - 3y - 6z = 0$ . Вычислить матрицу этого преобразования в базисе, в котором записаны уравнения прямой и плоскости.

**РЕШЕНИЕ.** Рассмотрим два способа решения задачи.

Способ 1. Это решение непосредственно опирается на определение преобразования проектирования. Обозначим через  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$  базис пространства, в котором записаны уравнения прямой и плоскости. Имеем  $V = L(a_1) + L(a_2, a_3)$ ,  $[a_1]_{\mathbf{e}} = (2, 1, -1)^{\top}$ ,  $[a_2]_{\mathbf{e}} = (3, 1, 0)^{\top}$ ,  $[a_3]_{\mathbf{e}} = (0, 2, -1)^{\top}$ , где  $a_1$  — направляющий вектор прямой,  $a_2, a_3$  — направляющие векторы рассматриваемой плоскости.

Разложим каждый из базисных векторов  $e_1, e_2, e_3$  по системе  $a_1, a_2, a_3$ . Для этого следует решить три системы линейных неоднородных уравнений, левая часть которых есть матрица, составленная из столбцов  $[a_1]_{\mathbf{e}}, [a_2]_{\mathbf{e}}, [a_3]_{\mathbf{e}}$ , а правая представляет собой координатный столбец соответствующего базисного вектора. Все три системы решим



как одно матричное уравнение:

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, & \varphi e_1 &= \frac{1}{5}a_1, \\
e_2 &= -\frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 - \frac{3}{5}a_3, & \varphi e_2 &= -\frac{3}{5}a_1, \\
e_3 &= -\frac{6}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, & \varphi e_3 &= -\frac{6}{5}a_1.
\end{aligned}$$

Тогда

$$[\varphi e_1]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\varphi e_2]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, [\varphi e_3]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и матрица преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$



Способ 2. Выберем в пространстве базис, состоящий из направляющего вектора прямой  $a_1$  и двух направляющих векторов плоскости  $a_2$  и  $a_3$ . В базисе  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  матрица преобразования проектирования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе  $\mathbf{e}$  матрицу  $[\varphi]_{\mathbf{e}}$  преобразования ищем по формуле  $[\varphi]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1} [\varphi]_{\mathbf{a}} [\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$ , где  $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$  — матрица перехода от базиса  $\mathbf{a}$  к базису  $\mathbf{e}$ , а  $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$  — матрица перехода от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{a}$ . Легко видеть, что

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу и получаем

$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу преобразования проектирования в базисе  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\mathbf{e}} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Заметим, что преобразование проектирования диагоналируемо. Базис из собственных векторов составляют, например, векторы  $a_1, a_2, a_3$ .

**Пример 3.** Линейное преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, диагоналируемо ли оно: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то вычислить матрицу  $B$  преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу  $Q$  перехода к этому базису.

**РЕШЕНИЕ.** Для нахождения коэффициентов характеристического многочлена найдем суммы главных миноров матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} s_1 &= 5 - 1 - 2 = 2, \\ s_2 &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1, \\ s_3 &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен имеет вид  $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$ . Среди делителей  $\pm 1, \pm 2$  свободного коэффициента находим один из корней  $\lambda_1 = 2$ . Для нахождения остальных корней исходный многочлен, умноженный на



$(-1)$ , поделим на  $\lambda - 2$ . Воспользуемся схемой Горнера:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \cdot 1 - 2 = 0 & 2 \cdot 0 + 1 = 1 & 2 \cdot 1 - 2 = 0 \end{array}$$

В частном получаем многочлен  $\lambda^2 + 1$ , корни которого равны  $\lambda_{2,3} = \pm i$ .

а) В вещественном случае преобразование обладает лишь одним собственным значением  $\lambda_1 = 2$  с алгебраической кратностью 1. Геометрическая кратность не превосходит алгебраической, следовательно, в нашем случае тоже равна 1. Максимальная линейно независимая система из собственных векторов состоит из одного вектора, следовательно, базиса из собственных векторов нет, преобразование не диагонализируемо.

б) В комплексном случае имеем три собственных значения. Для каждого из них решим систему  $(A - \lambda_i E)x = 0$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ .

Для  $\lambda_1 = 2$  система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение:  $x = t \cdot (4, 6, -3)^\top$ ,  $t \in \mathbf{C}$ .

Для  $\lambda_2 = i$  система имеет вид

$$\begin{cases} (5 - i)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - (1 + i)x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - (2 + i)x_3 = 0. \end{cases}$$



Для решения этой системы можно воспользоваться методом Гаусса, а можно, обратив внимание на то, что определитель системы равен нулю, воспользоваться “правилом смешанного произведения”. Первые две строки не пропорциональны, поэтому частное решение найдем через миноры, составленные из элементов этих двух строк:

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1-i & 2 \end{vmatrix} = 2i, & x_2 &= - \begin{vmatrix} 5-i & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2+2i, \\ x_3 &= \begin{vmatrix} 5-i & -1 \\ 6 & -1-i \end{vmatrix} = -4i. \end{aligned}$$

Общее решение:  $x = \tau \cdot (2i, 2+2i, -4i)^\top = t \cdot (1, 1-i, -2)^\top$ ,  $\tau, t \in \mathbb{C}$ .

Легко видеть, что для собственного числа  $\lambda_3 = -i$ , комплексно сопряженного с  $\lambda_2$ , общее решение системы, описывающей собственное подпространство, получается из предыдущего заменой всех чисел на сопряженные:  $x = t \cdot (1, 1+i, -2)^\top$ ,  $t \in \mathbb{C}$ .

Итак, в комплексном пространстве преобразование диагоналируемо. Записывая в матрицу  $B$  по диагонали собственные числа, а в матрицу  $Q$  по столбцам — координаты собственных векторов, получаем

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1-i & 1+i \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.** Выяснить, диагоналируемо ли преобразование комплексного линейного пространства, заданное мат-



рицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Находим характеристический многочлен:  $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ . Один корень,  $\lambda_1 = 1$ , — простой, другой,  $\lambda_{2,3} = -1$ , имеет алгебраическую кратность 2.

Для собственного числа  $\lambda_1 = 1$  система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение:  $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$ ,  $t \in \mathbf{C}$ .

Для собственного числа  $\lambda_{2,3} = -1$  система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение:  $x = t \cdot (1, 0, -1)^\top$ ,  $t \in \mathbf{C}$ .

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит только два вектора, поэтому преобразование не диагонализируемо.

**Пример 5.** Выяснить, диагонализируемо ли преобразование вещественного линейного пространства, заданное мат-



рицей

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если да, то вычислить матрицу  $B$  преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу  $Q$  перехода к этому базису.

РЕШЕНИЕ. Находим характеристический многочлен:  $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ . Один корень,  $\lambda_1 = 1$ , — простой, другой,  $\lambda_{2,3} = -1$ , имеет алгебраическую кратность 2.

Для  $\lambda_1 = 1$  система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение:  $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda_1 = 1$  равна 1.

Для  $\lambda_{2,3} = -1$  система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение:  $x = t_1 \cdot (1, 0, 1)^\top + t_2 \cdot (0, 1, 1)^\top$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ . Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda_{2,3} = -1$  равна 2.



Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит три вектора, поэтому преобразование диагонализуемо.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Контрольные задания

В примерах 1.1–1.30 линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит вектор  $a_i$  в вектор  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

а) Показать, что такое преобразование существует и единственно.

б) Найти матрицу преобразования в базисе  $a_1, a_2, a_3$ .

в) Найти матрицу преобразования в стандартном базисе  $e_1 = (1, 0, 0)^\top$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)^\top$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)^\top$ .

г) Найти ядро и образ данного преобразования.

д) Диагонализуемо ли преобразование? Если да, то указать диагональный вид преобразования и найти базис, в котором матрица преобразования диагональна.

1.1.  $a_1 = (1, 1, -1)^\top$ ,  $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$ ,  $a_3 = (0, -1, 1)^\top$ ,  
 $b_1 = (-5, -9, 3)^\top$ ,  $b_2 = (9, 15, -4)^\top$ ,  $b_3 = (0, 1, -1)^\top$ ;

1.2.  $a_1 = (1, 1, 1)^\top$ ,  $a_2 = (0, 1, 0)^\top$ ,  $a_3 = (1, 0, 2)^\top$ ,  $b_1 = (3, 7, -3)^\top$ ,  
 $b_2 = (4, 7, -2)^\top$ ,  $b_3 = (3, 8, -4)^\top$ ;

1.3.  $a_1 = (1, 0, 2)^\top$ ,  $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$ ,  $a_3 = (1, 0, 0)^\top$ ,  
 $b_1 = (3, 8, -4)^\top$ ,  $b_2 = (5, 10, -4)^\top$ ,  $b_3 = (-5, -8, 2)^\top$ ;



$$1.4. a_1 = (1, -1, 1)^\top, a_2 = (1, 2, 0)^\top, a_3 = (1, 1, 1)^\top, b_1 = (-5, -7, 1)^\top, b_2 = (3, 6, -2)^\top, b_3 = (3, 7, -3)^\top;$$

$$1.5. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (0, -1, 0)^\top, a_3 = (1, 2, 0)^\top, b_1 = (-5, -9, 3)^\top, b_2 = (-4, -7, 2)^\top, b_3 = (3, 6, -2)^\top;$$

$$1.6. a_1 = (2, 0, -1)^\top, a_2 = (1, 1, 1)^\top, a_3 = (1, 1, -1)^\top, b_1 = (-14, -24, 7)^\top, b_2 = (3, 7, -3)^\top, b_3 = (-5, -9, 3)^\top;$$

$$1.7. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (-1, 1, 0)^\top, a_3 = (0, -1, 1)^\top, b_1 = (4, 2, 6)^\top, b_2 = (-4, 2, -4)^\top, b_3 = (-3, -2, -4)^\top;$$

$$1.8. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (0, 1, 0)^\top, a_3 = (1, 0, 2)^\top, b_1 = (4, 2, 6)^\top, b_2 = (1, 2, 2)^\top, b_3 = (1, 0, 2)^\top;$$

$$1.9. a_1 = (1, 0, 2)^\top, a_2 = (-1, -2, 2)^\top, a_3 = (1, 0, 0)^\top, b_1 = (1, 0, 2)^\top, b_2 = (-11, -4, -14)^\top, b_3 = (5, 0, 6)^\top;$$

$$1.10. a_1 = (1, -1, 1)^\top, a_2 = (1, 2, 0)^\top, a_3 = (1, 1, 1)^\top, b_1 = (2, -2, 2)^\top, b_2 = (7, 4, 10)^\top, b_3 = (4, 2, 6)^\top;$$

$$1.11. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (0, -1, 0)^\top, a_3 = (1, 2, 0)^\top, b_1 = (8, 2, 10)^\top, b_2 = (-1, -2, -2)^\top, b_3 = (7, 4, 10)^\top;$$

$$1.12. a_1 = (2, 0, -1)^\top, a_2 = (1, 1, 1)^\top, a_3 = (1, 1, -1)^\top, b_1 = (12, 0, 14)^\top, b_2 = (4, 2, 6)^\top, b_3 = (8, 2, 10)^\top;$$

$$1.13. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (-1, 1, 0)^\top, a_3 = (0, -1, 1)^\top, b_1 = (-5, 1, -5)^\top, b_2 = (2, 1, 3)^\top, b_3 = (6, -1, 7)^\top;$$

$$1.14. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (0, 1, 0)^\top, a_3 = (1, 0, 2)^\top, b_1 = (-5, 1, -5)^\top, b_2 = (-3, 1, -3)^\top, b_3 = (1, 0, 2)^\top;$$

$$1.15. a_1 = (1, 0, 2)^\top, a_2 = (-1, -2, 2)^\top, a_3 = (1, 0, 0)^\top, b_1 = (1, 0, 2)^\top, b_2 = (17, -2, 20)^\top, b_3 = (-5, 0, -6)^\top;$$

$$1.16. a_1 = (1, -1, 1)^\top, a_2 = (1, 2, 0)^\top, a_3 = (1, 1, 1)^\top, b_1 = (1, -1, 1)^\top, b_2 = (-11, 2, -12)^\top, b_3 = (-5, 1, -5)^\top;$$

$$1.17. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (0, -1, 0)^\top, a_3 = (1, 2, 0)^\top,$$



$$\begin{aligned}
& b_1 = (-11, 1, -13)^\top, b_2 = (3, -1, 3)^\top, b_3 = (-11, 2, -12)^\top; \\
& 1.18. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (-1, 1, 0)^\top, a_3 = (0, -1, 1)^\top, \\
& b_1 = (-11, 1, -13)^\top, b_2 = (2, 1, 3)^\top, b_3 = (6, -1, 7)^\top; \\
& 1.19. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (-1, 1, 0)^\top, a_3 = (0, -1, 1)^\top, \\
& b_1 = (-10, 8, -10)^\top, b_2 = (1, -1, 0)^\top, b_3 = (9, -8, 8)^\top; \\
& 1.20. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (0, 1, 0)^\top, a_3 = (1, 0, 2)^\top, b_1 = \\
& (-10, 8, -10)^\top, b_2 = (-6, 5, -6)^\top, b_3 = (-1, 0, -2)^\top; \\
& 1.21. a_1 = (1, 0, 2)^\top, a_2 = (-1, -2, 2)^\top, a_3 = (1, 0, 0)^\top, \\
& b_1 = (-1, 0, -2)^\top, b_2 = (25, -22, 22)^\top, b_3 = (-7, 6, -6)^\top; \\
& 1.22. a_1 = (1, -1, 1)^\top, a_2 = (1, 2, 0)^\top, a_3 = (1, 1, 1)^\top, b_1 = \\
& (2, -2, 2)^\top, b_2 = (-19, 16, -18)^\top, b_3 = (-10, 8, -10)^\top; \\
& 1.23. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (-1, 1, 0)^\top, a_3 = (0, -1, 1)^\top, \\
& b_1 = (-16, 14, -14)^\top, b_2 = (1, -1, 0)^\top, b_3 = (9, -8, 8)^\top; \\
& 1.24. a_1 = (-1, 2, 1)^\top, a_2 = (0, -1, 1)^\top, a_3 = (1, -1, 1)^\top, \\
& b_1 = (-2, 1, -4)^\top, b_2 = (9, -8, 8)^\top, b_3 = (2, -2, 2)^\top; \\
& 1.25. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (-1, 1, 0)^\top, a_3 = (0, -1, 1)^\top, \\
& b_1 = (-3, -7, 3)^\top, b_2 = (3, 9, -4)^\top, b_3 = (2, 3, -1)^\top; \\
& 1.26. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (0, 1, 0)^\top, a_3 = (1, 0, 2)^\top, b_1 = \\
& (5, 9, -3)^\top, b_2 = (2, 5, -2)^\top, b_3 = (7, 12, -4)^\top; \\
& 1.27. a_1 = (1, 0, 2)^\top, a_2 = (-1, -2, 2)^\top, a_3 = (1, 0, 0)^\top, \\
& b_1 = (7, 12, -4)^\top, b_2 = (5, 10, -4)^\top, b_3 = (-1, -4, 2)^\top; \\
& 1.28. a_1 = (1, -1, 1)^\top, a_2 = (1, 2, 0)^\top, a_3 = (1, 1, 1)^\top, b_1 = \\
& (1, -1, 1)^\top, b_2 = (3, 6, -2)^\top, b_3 = (5, 9, -3)^\top; \\
& 1.29. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (0, -1, 0)^\top, a_3 = (1, 2, 0)^\top, \\
& b_1 = (-3, -7, 3)^\top, b_2 = (-2, -5, 2)^\top, b_3 = (3, 6, -2)^\top; \\
& 1.30. a_1 = (2, 0, -1)^\top, a_2 = (1, 1, 1)^\top, a_3 = (1, 1, -1)^\top, \\
& b_1 = (-6, -16, 7)^\top, b_2 = (5, 9, -3)^\top, b_3 = (-3, -7, 3)^\top.
\end{aligned}$$



В задачах 2.1–2.30 в базисе, в котором записаны уравнения подпространств, найти матрицу линейного преобразования  $\varphi$  трехмерного геометрического векторного пространства, указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ, если  $\varphi$  есть:

2.1. проектирование на прямую  $x = t, y = -t, z = 2t$  параллельно плоскости  $x + y + 2z = 0$ ;

2.2. симметрия относительно плоскости  $x - 2y + 3z = 0$  параллельно прямой  $x + z = 0, y + z = 0$ ;

2.3. проектирование на плоскость  $3x + y + 2z = 0$  параллельно прямой  $x = z, x + 2y - 3z = 0$ ;

2.4. симметрия относительно прямой  $x = 2t, y = t, z = -t$  параллельно плоскости  $x - 3y - 6z = 0$ ;

2.5. поворот вокруг прямой  $y + z = 0, 2x + y + 2z = 0$  на угол  $\pi/2$  (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.6. проектирование на прямую  $x = y, 2x - y + z = 0$  параллельно плоскости  $x - 2y + 3z = 0$ ;

2.7. симметрия относительно плоскости  $x + 3y + 3z = 0$  параллельно прямой  $y = z, x + y + z = 0$ ;

2.8. проектирование на плоскость  $x - y + 2z = 0$  параллельно прямой  $2x = y = z$ ;

2.9. симметрия относительно прямой  $x + 2y = 0, x - y + z = 0$  параллельно плоскости  $2x + y - z = 0$ ;

2.10. поворот вокруг прямой  $x = 2t, y = t, z = -2t$  на угол  $\pi/6$  (базис ортонормированный, два возможных



решения);

2.11. проектирование на прямую  $x = t, y = 2t, z = -2t$  параллельно плоскости  $2x + y - z = 0$ ;

2.12. симметрия относительно плоскости  $x - 2y - 2z = 0$  параллельно прямой  $x = 2t, y = t, z = 3t$ ;

2.13. проектирование на плоскость  $2x + y + z = 0$  параллельно прямой  $2x - y = 0, x + y - z = 0$ ;

2.14. симметрия относительно прямой  $x = t, y = -2t, z = 3t$  параллельно плоскости  $2x + y - z = 0$ ;

2.15. поворот вокруг прямой  $x + z = 0, x + 2y + 2z = 0$  на угол  $\pi/4$  (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.16. проектирование на прямую  $x = z, x + 2y - 3z = 0$  параллельно плоскости  $3x - y + 2z = 0$ ;

2.17. симметрия относительно плоскости  $2x + y - z = 0$  параллельно прямой  $x = 2z, x - y + z = 0$ ;

2.18. проектирование на плоскость  $2x + y + z = 0$  параллельно прямой  $x = t, y = 2t, z = 2t$ ;

2.19. симметрия относительно прямой  $y - 3z = 0, x + y - z = 0$  параллельно плоскости  $2x - y + z = 0$ ;

2.20. поворот вокруг прямой  $x = 2t, y = -2t, z = t$  на угол  $\pi/2$  (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.21. проектирование на прямую  $x = t, y = 2t, z = 3t$  параллельно плоскости  $2x + 2y - z = 0$ ;

2.22. симметрия относительно плоскости  $x - y - 2z = 0$  параллельно прямой  $x = -2y = -2z$ ;



2.23. проектирование на плоскость  $2x - y - z = 0$  параллельно прямой  $2x + y = 0$ ,  $2x + z = 0$ ;

2.24. симметрия относительно прямой  $x = y$ ,  $2x - y + z = 0$  параллельно плоскости  $x - 2y + 3z = 0$ ;

2.25. поворот вокруг прямой  $x + y = 0$ ,  $x + 2y + 2z = 0$  на угол  $\pi/4$  (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.26. проектирование на прямую  $x + 2y = 0$ ,  $x - y + 3z = 0$  параллельно плоскости  $x - y - 2z = 0$ ;

2.27. симметрия относительно плоскости  $3x + y + 2z = 0$  параллельно прямой  $x = z$ ,  $x + 2y - 3z = 0$ ;

2.28. проектирование на плоскость  $x - 2y + 3z = 0$  параллельно прямой  $x = y = -z$ ;

2.29. симметрия относительно прямой  $x = y$ ,  $2x - y + z = 0$  параллельно плоскости  $x - 2y + 3z = 0$ ;

2.30. поворот вокруг прямой  $x = 2t$ ,  $y = t$ ,  $z = -2t$  на угол  $\pi/3$  (базис ортонормированный, два возможных решения).

В задачах 3.1–3.10 подпространство  $W$  натянуто на систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе координатными столбцами. В этом базисе построить матрицу линейного преобразования, заключающегося в ортогональном проектировании на  $W$ , указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ.

3.1.  $(11, 25, -27, -9)^\top$ ,  $(4, 8, -9, -3)^\top$ ;

3.2.  $(11, 11, -48, 26)^\top$ ,  $(4, 4, -15, 7)^\top$ ;



- 3.3.  $(2, -16, -21, 35)^\top, (1, -5, -6, 10)^\top$ ;  
 3.4.  $(11, 11, -34, -16)^\top, (4, 4, -11, -5)^\top$ ;  
 3.5.  $(2, -16, -7, -7)^\top, (1, -5, -2, -2)^\top$ ;  
 3.6.  $(1, -8, 1, -8)^\top, (1, -5, 1, -5)^\top, (1, 1, -5, -5)^\top$ ;  
 3.7.  $(1, -8, 1, -8)^\top, (1, -5, 1, -5)^\top, (1, -5, -5, 1)^\top$ ;  
 3.8.  $(1, 1, -8, -8)^\top, (1, 1, -5, -5)^\top, (1, -5, -5, 1)^\top$ ;  
 3.9.  $(1, 8, -8, -1)^\top, (1, 5, -5, -1)^\top, (1, -1, -5, 5)^\top$ ;  
 3.10.  $(1, -8, -1, 8)^\top, (1, -5, -1, 5)^\top, (4, -5, 8, -1)^\top$ .

В задачах 3.11–3.30 подпространство  $W$  четырехмерно-го евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе системой линейных уравнений. Найти в этом базисе матрицу линейного преобразования, заключающегося в ортогональном проектировании пространства на  $W$ , указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ.

- 3.11.  $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$ ;  
 3.12.  $x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$ ;  
 3.13.  $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ ;  
 3.14.  $2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ ;  
 3.15.  $\begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$   
 3.16.  $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$   
 3.17.  $\begin{cases} x_1 - x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$   
 3.18.  $\begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$



$$\begin{aligned}
3.19. \quad & \begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases} \\
3.20. \quad & \begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases} \\
3.21. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases} \\
3.22. \quad & \begin{cases} x_1 + 8x_2 - 8x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases} \\
3.23. \quad & \begin{cases} x_1 - 8x_2 - x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \\
3.24. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 23x_2 - 16x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases} \\
3.25. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 16x_3 - 23x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases} \\
3.26. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 16x_3 - 23x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \\
3.27. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 21x_3 + 35x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 15x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}
\end{aligned}$$



$$3.28. \begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 26x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 17x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 26x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 17x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

В задачах 4.1–4.15 доказать, что формула  $\varphi(X) = A^\top X A$  определяет линейное преобразование пространства симметрических матриц ( $X^\top = X$ ). В произвольно выбранном базисе этого пространства найти матрицу преобразования, определить собственные числа и собственные векторы. Установить, диагонализируемо ли преобразование.



$$\begin{aligned}
4.1. \ A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & 4.2. \ A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \\
4.3. \ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; & 4.4. \ A &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \\
4.5. \ A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; & 4.6. \ A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \\
4.7. \ A &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; & 4.8. \ A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \\
4.9. \ A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; & 4.10. \ A &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \\
4.11. \ A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; & 4.12. \ A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \\
4.13. \ A &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; & 4.14. \ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \\
4.15. \ A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В задачах 4.16–4.30 доказать, что формула  $\varphi(X) = A^T X A$  определяет линейное преобразование пространства кососимметрических матриц ( $X^T = -X$ ). В произвольно выбранном базисе этого пространства найти матрицу преобразования, определить собственные числа и собственные векторы. Установить, диагонализируемо ли преобразование.



$$\begin{aligned}
4.16. A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & 4.17. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.18. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; & 4.19. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.20. A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & 4.21. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.22. A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}; & 4.23. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.24. A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; & 4.25. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.26. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; & 4.27. A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.28. A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & 4.29. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \\
4.30. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Пусть фиксированные ненулевые векторы  $a$  и  $n$  трехмерного пространства неортогональны между собой. В задачах 5.1–5.12 надо доказать линейность преобразования и



выяснить его геометрический смысл.

- |   |   |
|---|---|
| 5.1. $\varphi x = (a, x) \frac{a}{ a ^2};$        | 5.2. $\varphi x = \frac{(a, x)}{(a, n)} n;$       |
| 5.3. $\varphi x = x - (a, x) \frac{a}{ a ^2};$    | 5.4. $\varphi x = x - \frac{(a, x)}{(a, n)} n;$   |
| 5.5. $\varphi x = x - 2(a, x) \frac{a}{ a ^2};$   | 5.6. $\varphi x = 2(a, x) \frac{a}{ a ^2} - x;$   |
| 5.7. $\varphi x = x - 2 \frac{(a, x)}{(a, n)} n;$ | 5.8. $\varphi x = 2 \frac{(a, x)}{(a, n)} n - x;$ |
| 5.9. $\varphi x = (a, x) a;$                      | 5.10. $\varphi x = (n, x) a - (a, x) n;$          |
| 5.11. $\varphi x = (a, a) x - (a, x) a;$          | 5.12. $\varphi x = (a, a) x - 2(a, x) a;$         |
| 5.13. $\varphi x = 2(a, x) a - (a, a) x;$         | 5.14. $\varphi x = [a, x] \quad ( a  = 1);$       |
| 5.15. $\varphi x = (a, x) n - (n, x) a.$          |   |

### Литература

1. Воеводин В. В. *Линейная алгебра*. — М.: Наука, 1974.
2. Беклемишев Д. В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. — М.: Наука, 1983.



## Оглавление

<b>1. Теоретическое введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Примеры решения задач</b>	<b>8</b>
<b>3. Контрольные задания</b>	<b>20</b>
<b>Литература</b>	<b>31</b>

Линейные преобразования

Решение задач

(Методическая разработка)

Составители:

С. И. Веселов, к.ф.-м.н., доц. каф. МЛиВА,

Н. Ю. Золотых, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА,

Т. Г. Смирнова, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА.

Подписано в печать

Формат 60 × 84 1/16.

Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2. Тираж

250 экз. Заказ

Бесплатно.

---

Нижегородский государственный университет

им. Н. И. Лобачевского,

603600, ННГУ, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23

---

Типография ННГУ, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37